

Лекция 8. Моделирование случайных процессов.

Математическими моделями случайных процессов в общем случае являются случайные функции времени $\eta(t)$. Основными характеристиками случайной функции являются математическое ожидание $M[\eta(t)] = m_x(t)$, дисперсия $D[\eta(t)]$, являющиеся не случайными функциями времени, и корреляционная функция $R_x(t_i, t_j)$, являющаяся неслучайной функцией двух переменных t_i, t_j .

Все эти характеристики можно определить путем обработки опытных данных методами математической статистики.

Моделирование нестационарного случайного процесса

Для моделирования нестационарных случайных процессов академиком В.С. Пугачевым разработан метод канонических разложений.

Пусть задана случайная функция $\eta(t)$ с корреляционной функцией $R_x(t_i, t_j)$ и математическим ожиданием $m_x(t)$, а на оси времени задана последовательность точек t_1, t_2, \dots, t_n (не обязательно равноотстоящих друг от друга). Требуется получить реализацию $x(t)$ случайного процесса $\eta(t)$.

Обозначим

$$\eta(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(t), \quad (40)$$

где v_i – центрированные некоррелированные случайные величины с заданным законом распределения, $\varphi_i(t)$ – неслучайные функции t , называемые координатными функциями.

Подготовительная работа при моделировании случайного процесса методом канонических разложений (40) сводится к определению координатных функций и нахождению дисперсий.

Каноническое разложение корреляционной функции записывается в виде

$$R_x(t_i, t_j) = \sum_{k=1}^i \varphi_k(t_i) \cdot \varphi_k(t_j) \cdot D_k, \quad (41)$$

а каноническое разложение дисперсии имеет вид

$$D_x(t_i) = R_x(t_i, t_i) = \sum_{k=1}^i [\varphi_k(t_i)^2] \cdot D_k. \quad (42)$$

Из соотношений (41) и (42) вытекают формулы для определения координатных функций $\varphi_i(t)$ и дисперсий D_i случайных величин v_i :

$$\varphi_i(t_j) = [R_x(t_i, t_j) - \sum_{k=1}^{i-1} D_k \varphi_k(t_i) \varphi_k(t_j)] / D_i. \quad (43)$$

(следует иметь в виду, что при $i > j$ $\varphi_i(t_j) = 0$, а $\varphi_i(t_i) = 1$);

$$D_i = R_x(t_i, t_i) - \sum_{k=1}^{i-1} [\varphi_k(t_i)]^2 D_k. \quad (44)$$

И тогда для вычисления реализации $x(t)$ случайного процесса $\eta(t)$ имеет формулу

$$x(t_j) = m_x(t_j) + \sum_{i=1}^j y_i \cdot \varphi_i(t_j), \quad j = 1, n. \quad (45)$$

Здесь y_i – реализации случайных величин y_i . Закон распределения случайной величины y_i может быть произвольным, в частности, равномерным. Исключение составляет лишь гауссов процесс, при моделировании которого случайная величина y_i должна иметь нормальное распределение.

Алгоритм метода канонических разложений состоит из предварительного и основного этапов.

Предварительный этап

Шаг 1. Вычисление по формулам (43) и (44) дисперсии D_i , $i = \overline{1, n}$ и $\varphi_i(t_j)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Основной этап

Шаг 2. Получить n реализаций y_i случайной величины y с математическим ожиданием $m_y = 0$ и дисперсией D_i .

Шаг 3. Вычислить реализацию $x(t_j)$ по формуле (45).

Шаг 4. Принять $j = j + 1$.

Шаг 5. Проверить условие $j > n$, где n – заданное число точек на оси времени. При нарушении этого условия возврат на шаг 3.

Шаг 6. Вывод реализаций $x(t_j)$.

Моделирование стационарных случайных процессов

Для моделирования стационарных случайных процессов необходимо задать корреляционную функцию $R(\tau)$, математическое ожидание m и дисперсию σ^2 . Тогда формула для вычисления реализации стационарного процесса в точках t_1, t_2, \dots, t_n примет вид

$$x(t_j) = m + \sum_{i=1}^n a_i y_{i+j-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (46)$$

где y – реализации некоррелированных случайных величин с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией σ^2 .

Коэффициенты a_i вычисляются из соотношения

$$R(t_k - t_1) = (a_1 a_k + a_2 a_{k+1} + \dots + a_{n-k+1} a_n) \sigma^2. \quad (47)$$

Если стационарный случайный процесс является нормальным, то соотношения (46) и (47) примут следующий вид:

$$x(t_j) = m + \sum_{i=1}^n a_i U_{i+j-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (48)$$

$$R(t_k - t_1) = a_1 a_k + a_2 a_{k+1} + \dots + a_{n-k+1} a_n, \quad (49)$$

где U – реализация нормированной нормально распределенной случайной величины.

Алгоритм моделирования стационарных процессов состоит из двух этапов.

Предварительный этап

Шаг 1. Вычисление параметров a_i , $i = \overline{1, n}$ из соотношения (47).

Основной этап

Шаг 2. Получить реализации $y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}$ случайной величины y с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией σ^2 .

Шаг 3. Принять $j = 1$.

Шаг 4. Вычислить по формуле (46) реализацию $x(t_j)$.

Шаг 5. Положить $j = j + 1$.

Шаг 6. Проверить выполнение условия $j > n$. При нарушении этого условия возврат на шаг 4.

Шаг 7. Вывести все реализации $x(t_j)$.

Моделирование марковских процессов

Марковским, как известно, называются случайные процессы, для предсказания вероятностных характеристик которых в будущем достаточно знать состояние процесса в настоящий момент.

Рассмотрим однородный марковский процесс (цепь) со счетным числом состояний S_i , $i = \overline{1, n}$ и дискретным временем.

Для полного определения однородной марковской цепи необходимо задавать начальные вероятности $P_i(0)$ и матрицу переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} \quad (50)$$

Здесь $p_{ij} = P\{S_j/S_i\}$ – условная вероятность перехода в состояние S_j , если на предыдущем шаге имело место состояние S_i .

Случайный процесс в марковской цепи представляет собой случайный переход из одного состояния S_i в другое S_j в фиксированные моменты времени t_1, t_2, \dots , например

$$S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_4 \rightarrow \dots \quad (51)$$

Следовательно, моделирование марковского процесса состоит в определении цепи (51) и осуществляется по следующему принципу. Сначала выбирается начальное состояние марковской цепи, задаваемое начальными вероятностями $P_i(0) = p_{0i}$, $i = \overline{1, n}$.

Для этого можно воспользоваться методом моделирования полной группы событий, заданной таблицей вероятностей

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0n} \end{pmatrix} \quad (52)$$

и найти номер начального состояния, например, S_m . Аналогично находится следующее состояние. Однако здесь в качестве элементов нижней строки таблицы (52) используются элементы m -й строки матрицы (50). В результате многократного повторения указанной процедуры получим одну из возможных реализаций марковского процесса

$$S_m \rightarrow S_k \rightarrow \dots \rightarrow S_l.$$

Этот принцип можно использовать и для моделирования более сложных марковских процессов, например, неоднородных.

Алгоритм моделирования однородных марковских процессов с n дискретными состояниями состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Принять $i = 1$ и $k = 0$. Здесь i – номер реализации процесса; k – индекс состояний марковской цепи.

Шаг 2. Положить $p_j = p_{kj}$, $j = \overline{1, n}$.

Шаг 3. Получить реализацию z базовой случайной величины ξ .

Шаг 4. Принять $k = 1$, $R = p_k$.

Шаг 5. Проверить условие $z \leq R$. При его выполнении переход на шаг 7.

Шаг 6. Положить $k = k + 1$ и $R = R + p_k$. Возврат на шаг 5.

Шаг 7. Положить $S_i = S_k$, $i = i + 1$.

Шаг 8. Проверить условие $i > N$, т.е. все ли реализации марковского процесса получены. Если нет, то возврат на шаг 2.

Шаг 9. Вывод полученных результатов.

Контрольные вопросы:

1. Какие случайные процессы называются стационарными?
2. Какой метод применяется для моделирования нестационарных случайных процессов?
3. Приведите алгоритм моделирования марковских процессов.